Несобственные интегралы

Рассмотренное ранее определение определенного интеграла было дано для случая, когда промежуток интегрирования являлся отрезком, и подынтегральная функция была непрерывна на этом отрезке. Однако при решении некоторых задач возникает необходимость нахождения определенных интегралов по бесконечным промежуткам интегрирования, называемых ***несобственными интегралами I рода***, и определенных интегралов от функций, не являющихся непрерывными на отрезке интегрирования, их называют ***несобственными интегралами II рода***.

Расширим понятие определенного интеграла на случай бесконечного предела или неограниченной функции.

**Определение.** Пусть функция  определена на промежутке  и интегрируема по любому отрезку , т.е.  при . Тогда, если существует конечный предел , то его называют несобственным интегралом первого рода и обозначают .

Таким образом, по определении.

. (1)

В этом случае говорят, что интеграл существует или сходится. Если предел, указанный в определении не существует (равен бесконечности), говорят, что интеграл расходится.

Аналогично вводится несобственный интеграл по промежутку :

. (.2)

Наконец, как сумму интегралов вида (1) и (2) можно определить несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами, т.е.

, (.3)

где  - любое число, при условии существования обоих интегралов справа.

**Определение.** Пусть функция  определена на промежутке . Точку  будем называть особой, если функция неограниченна в любой окрестности этой точки, но ограничена на любом отрезке , заключенном в . Пусть на любом отрезке  функция  интегрируема, т.е. существует  при любом  таком, что . Тогда, если существует конечный предел , то его называют несобственным интегралом второго рода и обозначают . (4)

В этом случае говорят, что интеграл (10.4) существует или сходится. Если же предел не существует или бесконечен, то говорят, что интеграл (10.4) не существует или расходится.

Аналогично, если  - особая точка.

Если функция  не ограничена в окрестности какой-нибудь внутренней точки , то при условии существования обоих интегралов справа по определению полагают .

Наконец, если  и  - особые точки, то если оба интеграла справа существуют, несобственный интеграл определяется как сумма .

Рассмотрим вопрос о сходимости несобственных интегралов вида .

**Теорема (признак сравнения несобственных интегралов).** Если функции  и  непрерывны на промежутке  и удовлетворяют на нем условию , то из сходимости интеграла

 (10.5)

следует сходимость интеграла

, (10.6)

а из расходимости интеграла (10.6) следует расходимость интеграла (10.5).

*Замечание.* Аналогичный признак сравнения для несобственных интегралов второго рода можно сформулировать следующим образом: если функции  и  непрерывны на полуинтервале  и для всех точек  выполняются условия , то из сходимости интеграла  следует сходимость интеграла , а из расходимости интеграла  следует расходимость интеграла .

**Теорема. (признак Коши сходимости несобственных интегралов).** Несобственный интеграл вида  сходится тогда и только тогда, когда для   такое, что для  следует .

*Пример14.* Вычислить интеграл: .

.

*Пример2.* Вычислить интеграл: .

Так как  является точкой разрыва подынтегральной функции, то данный интеграл нужно представить в виде суммы:



.

Таким образом, интеграл  является расходящимся.

Литература:

1. Д. Письменный «Конспект лекций по высшей математике», глава 8, параграф 40.
2. Н.Ш. Кремер «Высшая математика для экономистов», глава 11 п. 11.7